

# 飽和多孔質体における多成分混合溶液の拡散・浸透・圧密問題の新展開<sup>†</sup>

市川 康明\* 橘 翔子\*\*  
 崔 定海\*\*\* A. P. S. Selvadurai\*\*\*\*

## A New Development of Coupled Diffusion, Seepage and Consolidation Problem of Multi-Component Mixture in Saturated Porous Media

by

Yasuaki ICHIKAWA\*, Shoko TACHIBANA\*\*, Jung-Hae CHOI\*\*\* and A. P. S. SELVADURAI\*\*\*\*

A relation of diffusion and seepage is discussed on the basis of mass conservation law for porous media saturated with a multi-component solution. Note that both phenomena have independently treated in the classical theory of porous materials. In the seepage problem we shed light on a physical implication of seepage velocity. In the diffusion problem we show sorption can be introduced on concepts of a source term, a distribution factor or an equation of adsorption isotherm.

**Key words** : Mixture, Saturated porous media, Diffusion, Seepage, Coupling

### 1 序 論

飽和多孔質物体中における多成分混合溶液の拡散問題と浸透問題は、これまで一般には別理論として扱われてきた<sup>1), 2)</sup>。これに対して前報<sup>3)</sup>では連続体力学理論の質量保存則に基づいて拡散・浸透問題を統一的に記述できることを報告した。そこでは外部から供給される各溶液成分の質量流束を陽の形で質量保存則を組み立てていたが、本論文では Bowen<sup>4)</sup>の古典的な多成分混合溶液の理論を拡張し、境界条件として質量流束が組み込める形に修正している。また、液相のみならず固相に対しても全成分の和を取るにより、固相の変形と浸透流による流体移動の関係がより明確になっている。なお、総和規約を用いるが、記号 $\alpha$ は、 $\alpha$ についての和を取らないことを意味する。また、 $\alpha$ 成分の濃度 $c_\alpha$ として、前報<sup>3)</sup>では体積モル濃度 $c_\alpha = n\rho_\alpha/m_\alpha$  ( $n$ は間隙率、 $\rho_\alpha$ は $\alpha$ 成分の質量密度、 $m_\alpha$ は同じく分子量)を用いていたが、本論文では連続体力学で通常用いられる質量分率を濃度として用いることにする ( $c_\alpha = \rho_\alpha/\rho$ ,  $\rho = \sum \rho_\alpha$ )。

### 2 多成分混合溶液の拡散・浸透圧密問題:

#### Bowen<sup>4)</sup>理論の拡張

Bowen<sup>4)</sup>の多成分混合溶液の理論を固相と液相が混在する多孔質体に拡張する(間隙率 $n$ )。ただし、用いる記号は Bowen<sup>4)</sup>とは異なっている。

$N$ 成分を有する液相が占める連続物体を $B_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ )と表現する。なお、混合体理論に従って、 $\alpha$ 成分の物体 $B_\alpha$ は各々、独立した参照形態(reference configuration)を有するので、3次元実数空間 $\mathbb{R}^3$ 内の現在物体

(current body)  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ における空間点 $\mathbf{x}$ の運動(motion)は、空間座標系(spatial coordinates)の直交基底(Euler基底)を $\mathbf{e}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ )として

$$\mathbf{x} = \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t) = x_i \mathbf{e}_i \quad (1)$$

と表現される。ここで、 $\chi_\alpha$ は $\alpha$ 成分に関する変形関数(deformation function)と呼ばれる十分に滑らかな関数である。 $\mathbf{X}_\alpha$ は参照形態における $\alpha$ 成分の物質点、 $t$ は時間を表す。なお、物体 $\Omega$ の境界を $\partial\Omega$ とする。関数 $\chi_\alpha$ は十分に滑らかであるので、参照位置(reference position) $\mathbf{X}_\alpha$ が

$$\mathbf{X}_\alpha = \chi_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t) = X_{\alpha K} \mathbf{E}_K \quad (2)$$

と求まる。ここで、 $\chi_\alpha^{-1}$ は変形関数の逆写像であり、 $\mathbf{E}_K$  ( $K = 1, 2, 3$ )は物質座標系(material coordinates)の直交基底(Lagrange基底)である。なお、参照成分 $N$ が2である場合の幾何学的状況を Fig. 1 に示す。

物質点 $\mathbf{X}_\alpha$ の時刻 $t$ における速度は

$$\mathbf{v}_\alpha = \left. \frac{d_\alpha \chi_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t)}{dt} \right|_{\mathbf{X}_\alpha = \text{constant}} \quad (3)$$

と書かれる。ここで、関数 $\phi(\mathbf{x}, t)$ の $\alpha$ 成分に関する物質微分 $d_{(\alpha)}\phi/dt$ は、空間記述では

$$\frac{d_{(\alpha)}\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \cdot \text{grad}\phi \quad (4)$$

である。記号 grad は空間座標に関する勾配(gradient)を意味する。

変形勾配 $\mathbf{F}_\alpha = \mathbf{F}_{\alpha i k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{E}_K$ とその逆変換 $\mathbf{F}_\alpha^{-1} = \mathbf{F}_{\alpha k i}^{-1} \mathbf{E}_K \otimes \mathbf{e}_i$ は

<sup>†</sup> 原稿受理 平成 21 年 7 月 8 日 Received July 8, 2009 © 2010 The Society of Materials Science, Japan

\* 正 会 員 岡山大学環境学研究所社会基盤環境学専攻 〒700-8530 岡山市北区津島中, Dept. of Urban Environment Development, Okayama Univ., Kita-ku, Okayama, 700-8530

\*\* (株)クインテッサジャパン 〒220-6007 横浜西区みなとみらい, Quintessa Japan, Nishi-ku, Yokohama, 220-6007

\*\*\* 岡山大学環境学研究所社会基盤環境学専攻 〒700-8530 岡山市北区津島中, Dept. of Urban Environment Development, Okayama Univ., Kita-ku, Okayama, 700-8530

\*\*\*\* Dept. of Civil Eng. and Applied Mechanics, McGill Univ., Montreal, Quebec, Canada H3A 2K6

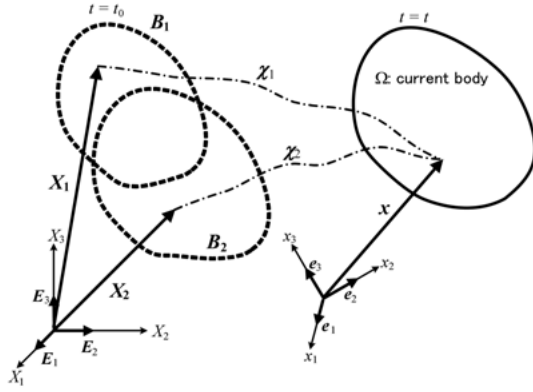


Fig. 1 Mixture fluid.

$$\mathbf{F}_\alpha = \text{Grad } \boldsymbol{\chi}_\alpha(\mathbf{X}_\alpha, t), \quad F_{\alpha i K} = \frac{\partial x_i}{\partial X_{\alpha K}} \quad (5)$$

$$\mathbf{F}_\alpha^{-1} = \text{grad } \boldsymbol{\chi}_\alpha^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad F_{\alpha K i}^{-1} = \frac{\partial X_{\alpha K}}{\partial x_i} \quad (6)$$

と与えられる。ここで、記号 Grad は物質座標に関する勾配を意味する。このとき、 $\alpha$ 成分に対するヤコビアン  $J_\alpha$ の時間変化が

$$\frac{d_{(\alpha)} J_\alpha}{dt} = J_\alpha \text{div } \mathbf{v}_\alpha, \quad J_\alpha = |\det \mathbf{F}_\alpha| \quad (7)$$

と計算される。記号 div は空間座標系に関する発散 (divergence) を意味する。

固相における基質拡散 (matric diffusion) を考慮する場合には、上記の液相に関する議論と並列な議論が固相に対しても適用される。 $B_\alpha^*$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, N$ ) を  $\alpha$ 成分の固相が占める連続物体とすると、固相部分の空間点  $\mathbf{x}$  の運動は

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_\alpha^*(\mathbf{X}_\alpha^*, t) = x_i^* \mathbf{e}_i \quad (8)$$

$$\mathbf{X}_\alpha^* = (\boldsymbol{\chi}_\alpha^*)^{-1}(\mathbf{x}, t) = X_{\alpha K}^* \mathbf{E}_K. \quad (9)$$

と書かれる。液相と同様に、速度等の諸量が以下のように表現されることは明らかである。

$$\mathbf{v}_\alpha^* = \left. \frac{d_{(*\alpha)} \boldsymbol{\chi}_\alpha^*(\mathbf{X}_\alpha^*, t)}{dt} \right|_{\mathbf{X}_\alpha^* = \text{constant}} \quad (10)$$

$$\frac{d_{(*\alpha)} \phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha^* \cdot \text{grad } \phi \quad (11)$$

$$\mathbf{F}_\alpha^* = \text{Grad } \boldsymbol{\chi}_\alpha^*(\mathbf{X}_\alpha^*, t), \quad F_{\alpha i K}^* = \frac{\partial x_i}{\partial X_{\alpha K}^*} \quad (12)$$

$$(\mathbf{F}_\alpha^*)^{-1} = \text{grad } (\boldsymbol{\chi}_\alpha^*)^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad (F_{\alpha K i}^*) = \frac{\partial X_{\alpha K}^*}{\partial x_i} \quad (13)$$

$$\frac{d_{(*\alpha)} J_\alpha^*}{dt} = J_\alpha^* \text{div } \mathbf{v}_\alpha^*, \quad J_\alpha^* = |\det \mathbf{F}_\alpha^*|. \quad (14)$$

### 2.1 液相における質量保存則

多成分混合体から成る液相の  $\alpha$ 成分の物質量を  $n_\alpha$  とすると、体積モル濃度 (体積分率 volume fraction)  $\omega_\alpha$  と質量密度 (mass density)  $\rho_\alpha$  が

$$n_\alpha = \int_\Omega n \omega_\alpha dv = \int_\Omega n \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha} dv \quad (!\alpha) \quad (15)$$

と定義される。ここで、 $m_\alpha$  は  $\alpha$ 成分の分子量 (molecular weight) である。\*

化学反応等に起因した  $\alpha$ 成分の質量供給 (mass supply) を  $\gamma_\alpha$ 、固相の微粒子表面  $\Gamma_{fs}^i$  における吸着量を  $\zeta_\alpha$  とすると、 $\alpha$ 成分の質量保存則が

$$\begin{aligned} \frac{d_{(\alpha)} n \rho_\alpha}{dt} \int_\Omega n \rho_\alpha dv \\ = \int_\Omega n \gamma_\alpha dv - \sum_{i=1}^M \int_{\Gamma_{fs}^i} \zeta_\alpha \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (16)$$

と書かれる。ここで、 $\mathbf{n}$  は外向き単位法線ベクトル、 $M$  は吸着に関与する全ての粒子の数であり、式 (16) の右辺第 2 項は、全粒子について和を取ることを意味する。

式 (7) の下で Reynolds の輸送定理を式 (16) の左辺に適用すると、局所形の質量保存則

$$\begin{aligned} \frac{d_{(\alpha)} n \rho_\alpha}{dt} + n \rho_\alpha \text{div } \mathbf{v}_\alpha \\ = \frac{\partial (n \rho_\alpha)}{\partial t} + \text{div} (n \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = n \gamma_\alpha - \zeta_\alpha^* \quad (!\alpha) \end{aligned} \quad (17)$$

が得られる。ここで、 $\zeta_\alpha^*$  は表面吸着量  $\zeta_\alpha$  から評価された単位体積当りの吸着量である。具体的な  $\zeta_\alpha^*$  の評価法については、市川他<sup>3)</sup>の注 2.2 を参照されたい。

式 (17) の全成分に関する和を取ると、

$$\frac{d(n\rho)}{dt} + n\rho \text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial (n\rho)}{\partial t} + \text{div}(n\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (18)$$

が得られる。なお、本稿では吸着現象を通してのみ、液相と固相の化学種が交換可能であると考えている。したがって、液相における吸着現象を含めた全質量変化は零である。すなわち、

$$\sum_\alpha (n \gamma_\alpha - \zeta_\alpha^*) = 0 \Rightarrow \sum_\alpha n \gamma_\alpha = \zeta^* \quad (19)$$

であり、式 (18) ではこれを利用した。ここで、平均流速 (mean velocity)  $\mathbf{v}$ 、全質量  $\rho$ 、全吸着量  $\zeta^*$  を

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \sum_\alpha \rho_\alpha \mathbf{v}_\alpha, \quad \rho = \sum_\alpha \rho_\alpha, \quad \zeta^* = \sum_\alpha \zeta_\alpha^* \quad (20)$$

と定義した。また、関数  $\phi$  の空間点  $(\mathbf{x}, t)$  における平均流速  $\mathbf{v}$  に関する物質時間微分  $d\phi/dt$  は

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad } \phi \quad (21)$$

と与えられる。速度勾配 (velocity gradient)  $\mathbf{L}$ 、伸縮率テンソル (stretching tensor)  $\mathbf{D}$ 、スピントテンソル (spin tensor)  $\mathbf{W}$  は、それぞれ、

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \text{grad } \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{W}, \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T), \quad \mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \end{aligned} \quad (22)$$

となる。ここで、 $(\cdot)^T$  は転置を意味する。

平均流速  $\mathbf{v}$  を用いると式 (17) は

$$\begin{aligned} \frac{d(n\rho_\alpha)}{dt} + n\rho_\alpha \text{div } \mathbf{v} \\ = -\text{div}(n\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + n\gamma_\alpha - \zeta_\alpha^* \quad (!\alpha) \end{aligned} \quad (23)$$

と書き換えることができる。ここで、拡散速度 (diffusion velocity)  $\bar{\mathbf{v}}_\alpha$  をつぎのように定義した。

\* 式 (15) では体積モル濃度を与えたが、これは化学分野で良く用いられる。一方、例えば Bowen<sup>4)</sup>等の連続体力学では式 (26) のように質量分率に基づく濃度  $c_\alpha$  が、通常、用いられる。

$$\bar{\mathbf{v}}_\alpha = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}. \quad (24)$$

式 (18) と式 (23) から  $\mathbf{v}$  を消去すると

$$\begin{aligned} \frac{d(n\rho_\alpha)}{dt} - c_\alpha \frac{d(n\rho)}{dt} \\ = -\operatorname{div}(n\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + n\gamma_\alpha - \zeta_\alpha^* (!\alpha) \end{aligned} \quad (25)$$

を得る。ここで、 $c_\alpha$  は質量分率に基づく濃度であり、

$$c_\alpha = \frac{n\rho_\alpha}{n\rho} = \frac{\rho_\alpha}{\rho} \quad (26)$$

と定義される。この  $c_\alpha$  の  $\mathbf{v}$  に関する物質時間微分を取ると

$$n\rho \frac{dc_\alpha}{dt} = -\frac{d(n\rho)}{dt} c_\alpha + \frac{d(n\rho_\alpha)}{dt} \quad (27)$$

であり、式 (27) を式 (25) に代入することにより、最終的につぎの拡散方程式が得られる。

$$n\rho \frac{dc_\alpha}{dt} = -\operatorname{div}(n\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + n\gamma_\alpha - \zeta_\alpha^* (!\alpha) \quad (28)$$

なお、式 (26) から判るように、濃度  $c_\alpha$  にはつぎの制約条件が課せられる。

$$\sum_\alpha c_\alpha = 1. \quad (29)$$

## 2・2 固相における質量保存則

前述のように、固相においても液相と同様に各化学種が拡散や反応の現象を起こすものとする。この場合、式 (16) のアナロジーから固相における化学種  $\alpha$  成分の質量保存則が

$$\begin{aligned} \frac{d^{(*\alpha)}}{dt} \int_\Omega (1-n) \rho_\alpha^* dv \\ = \int_\Omega (1-n) \gamma_\alpha^* dv + \sum_{i=1}^M \int_{\Gamma_i^*} \zeta_\alpha^* \cdot \mathbf{n} ds \end{aligned} \quad (30)$$

と書ける。ここで、 $\gamma_\alpha^*$  は固相における  $\alpha$  成分の質量供給であり、 $\rho_\alpha^*$  は

$$n_\alpha^* = \int_\Omega (1-n) \omega_\alpha^* dv = \int_\Omega (1-n) \frac{\rho_\alpha^*}{m_\alpha} dv (!\alpha) \quad (31)$$

で定義される固相における  $\alpha$  成分の質量密度である。 $n_\alpha^*$  は  $\alpha$  成分の物質質量であり、 $\omega_\alpha^*$  は体積モル濃度（体積分率）である。

式 (30) の局所形は

$$\begin{aligned} \frac{d^{(*\alpha)}((1-n)\rho_\alpha^*)}{dt} + (1-n)\rho_\alpha^* \operatorname{div} \mathbf{v}_\alpha^* \\ = \frac{\partial((1-n)\rho_\alpha^*)}{\partial t} + \operatorname{div}((1-n)\rho_\alpha^* \mathbf{v}_\alpha^*) \\ = (1-n)\gamma_\alpha^* + \zeta_\alpha^* (!\alpha) \end{aligned} \quad (32)$$

となる。式 (32) の全成分に関する和を取ると

$$\begin{aligned} \frac{d_*((1-n)\rho^*)}{dt} + (1-n)\rho^* \operatorname{div} \mathbf{v}^* \\ = \frac{\partial((1-n)\rho^*)}{\partial t} + \operatorname{div}((1-n)\rho^* \mathbf{v}^*) = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

である。ここで、

$$\mathbf{v}^* = \frac{1}{\rho^*} \sum_\alpha \rho_\alpha^* \mathbf{v}_\alpha^*, \quad \rho^* = \sum_\alpha \rho_\alpha^*, \quad (34)$$

とした。なお、式 (19) と同様に制約条件

$$\sum_\alpha (1-n)\gamma_\alpha^* = \zeta^* \quad (35)$$

が必要である。また、関数  $\phi$  の物質時間微分  $d_*\phi/dt$  は平均粒子速度  $\mathbf{v}^*(\mathbf{x}, t)$  に関して

$$\frac{d_*\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathbf{v}^* \cdot \operatorname{grad} \phi. \quad (36)$$

と与えられる。固相部の速度勾配  $\mathbf{L}^*$ 、伸縮率テンソル  $\mathbf{D}^*$ 、スピンテンソル  $\mathbf{W}^*$  は、それぞれ、

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^* = \operatorname{grad} \mathbf{v}^* = \mathbf{D}^* + \mathbf{W}^*, \\ \mathbf{D}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^* + (\mathbf{L}^*)^T), \quad \mathbf{W}^* = \frac{1}{2}(\mathbf{L}^* - (\mathbf{L}^*)^T) \end{aligned} \quad (37)$$

と計算される。

式 (28) を導いたと同じ論理で、固相部における化学種  $\alpha$  成分の拡散方程式

$$\begin{aligned} (1-n)\rho^* \frac{d_*c_\alpha^*}{dt} \\ = -\operatorname{div}((1-n)\rho_\alpha^* \bar{\mathbf{v}}_\alpha^*) + (1-n)\gamma_\alpha^* + \zeta_\alpha^* (!\alpha) \end{aligned} \quad (38)$$

が導かれる。ここで、

$$\bar{\mathbf{v}}_\alpha^* = \mathbf{v}_\alpha^* - \mathbf{v}^* \quad (39)$$

は  $\alpha$  成分の拡散速度である。式 (29) と同様に、濃度  $c_\alpha^*$  には制約条件

$$\sum_\alpha c_\alpha^* = 1 \quad (40)$$

が課せられる。

固相部における拡散は基質拡散 (matric diffusion) と呼ばれている。近年、き裂性岩盤 (fractured rock) における基質拡散が問題となっているが<sup>5)</sup>この場合は基質と捉えている部分にも多数のき裂 (空隙) を考えており、純粋な固体部への拡散とは考え難い。このような場合を除いて、通常、固体部への基質拡散速度  $\bar{\mathbf{v}}_\alpha^*$  は極めて小さく、無視できる ( $|\bar{\mathbf{v}}_\alpha^*| \ll 1$ )。

式 (24), (39) により化学種  $\alpha$  成分の拡散質量流束 (diffusion mass flux) を

$$\mathbf{q}_\alpha^m = n\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha + (1-n)\rho_\alpha^* \bar{\mathbf{v}}_\alpha^* (!\alpha) \quad (41)$$

と導入する。

### 注 2.1 : 分配係数 $K_d$ と慣用吸着・拡散方程式について

溶液が希薄で理想溶液と考えてよい場合、吸着項は固相への分配として取り扱い、分配係数 (distribution coefficient)  $K_d$  が<sup>3)</sup>

$$c_\alpha^* = K_d c_\alpha \quad (42)$$

と導入される。希薄溶液では一般に、 $K_d$  は定数と考えられ、また、固相部における  $\mathbf{v}_\alpha^*$ 、 $\mathbf{v}^*$  の値も小さいために、拡散速度  $\bar{\mathbf{v}}_\alpha^*$  は無視することができる。この仮定の下で式 (28) と式 (38) を加え合わせると、慣用的な吸着・拡散方程式が

$$\begin{aligned} R_d \frac{\partial c_\alpha}{\partial t} + n\rho \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} c_\alpha \\ = -\operatorname{div}(n\rho_\alpha \bar{\mathbf{v}}_\alpha) + n\gamma_\alpha + (1-n)\gamma_\alpha^* (!\alpha) \end{aligned} \quad (43)$$

と得られる。ここで、 $R_d$  は緩和係数 (retardation coefficient) と呼ばれ、

$$R_d = n\rho + (1-n)\rho^* K_d \quad (44)$$

と定義される。なお、分配係数  $K_d$  で吸着現象を評価する場合、式 (28) と式 (38) の右辺第 3 項を無視することは言うまでもない。

## 注 2.2: Fick 則について

古典的な拡散理論では, 通常, 固相部における拡散が無視できるという仮定の下で拡散流束  $\mathbf{q}_\alpha^m$  に対して Fick 則

$$\mathbf{q}_\alpha^m = -\sum_{\beta} D_{\alpha\beta} \text{grad } c_{\beta} \quad (45)$$

が導入される. ここで,  $D_{\alpha\beta}$  は拡散係数と呼ばれ, 正定値性を有する (任意の  $\eta_\alpha$  に対して  $\eta_\alpha D_{\alpha\beta} \eta_\beta > 0$ ). 関係式 (45) は経験式に過ぎないことに注意を要する. なお, 式 (41) から判るように, 制約条件

$$\sum_{\alpha} \mathbf{q}_\alpha^m = -\sum_{\alpha} \sum_{\beta} D_{\alpha\beta} \text{grad } c_{\beta} = 0 \quad (46)$$

が課される.

### 2.3 浸透方程式

拡散方程式, 例えば式 (28) を解く場合, 如何にして平均流速  $\mathbf{v}$  を求めるかが問題となる ( $dc_\alpha/dt = \partial c_\alpha/\partial t + \mathbf{v} \cdot \text{grad } c_\alpha$  であることに注意). もちろん, 液相に対して運動方程式を導入して直接  $\mathbf{v}$  を求めることも可能であるが, 古典的な土質力学では式 (18) と式 (33) から浸透方程式を導いて  $\mathbf{v}$  を求めることが一般的である.

混合体溶液並びに固体実質部は非圧縮であると仮定する ( $\rho = \text{constant}$ ,  $\rho^* = \text{constant}$ ) と, 式 (18), (33) は, 式 (37) を適用することにより

$$\frac{dn}{dt} + \text{div}(n\mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot \text{grad } n = 0 \quad (47)$$

$$-\frac{d_* n}{dt} + (1-n) \text{tr } \mathbf{D}^* = 0 \quad (48)$$

と書くことができる. ここで, 関係式

$$\frac{d_* n}{dt} = \frac{dn}{dt} - (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot \text{grad } n \quad (49)$$

を用い, これを式 (48) に代入すると

$$\frac{dn}{dt} = (1-n) \text{tr } \mathbf{D}^* + (\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) \cdot \text{grad } n \quad (50)$$

が得られる. これを式 (47) に代入することにより, 固相部の体積変形  $\mathbf{D}^*$  を含んだ浸透方程式が最終的に

$$\text{tr } \mathbf{D}^* + \text{div}[n(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*)] = 0 \quad (51)$$

と得られる. これに Darcy 則

$$n(\mathbf{v} - \mathbf{v}^*) = -\frac{k}{\eta} \text{grad } \phi, \quad \phi = \frac{p}{\rho g} + h \quad (52)$$

を適用して平均流速  $\mathbf{v}$  が求められる. ただし,  $\mathbf{v}^*$  を定めるために, 固相部の運動方程式または平衡方程式が必要

であるのは言うまでもない. ここで,  $k$  は透水係数テンソルであり,  $g$  は重力定数,  $\eta$  は溶液の粘性係数,  $h$  は位置ポテンシャルである. なお, 透水係数  $k$  は実験より定められるとするのが古典土質力学の立場であるが, ベントナイト等の粘土材料に対して分子シミュレーションと均質化法を適用すると, 解析的に透水係数を求められることが示されている (Ichikawa *et al*<sup>(6)</sup>).

### 3 おわりに

本研究では, Bowen<sup>(4)</sup> の古典的な多成分混合溶液の理論を拡張し, 多孔質媒体中における拡散・浸透問題について議論した. 最終的に導かれた液相の拡散方程式 (28), 固相の基質拡散方程式 (38), 浸透方程式 (51) は古典理論を拡張したものであり, 拡散場と浸透場の関係に新しい光を当てている. なお, 浸透方程式 (51) は有効応力に関する運動方程式あるいは平衡方程式と連成して圧密方程式を構成することは, 言うまでもない.

ここで得られた支配方程式を用いると, 泥岩中において化学変化と浸透・圧密場が連成して地下水面上昇を惹き起すような浸透圧に類似した問題等に関しても, 有限変位場を含めて解を与えることができると考えている.

### 参考文献

- 1) J. Bear and A. Verruijt, "Modeling groundwater flow and pollution", pp.1-385 (1987) D. Reidel.
- 2) O. Coussy, "Mechanics of porous continua", pp.1-450 (1995) John Wiley & Sons.
- 3) Y. Ichikawa, J.-H. Choi and B.-C. Kim, "Coupled diffusion and seepage problem in porous media", Journal of The Society of Materials Science, Japan, Vol.56, No.9, pp.851-857 (2007).
- 4) R. Bowen, "Theory of mixture", in Continuum Physics Vol.III, ed. A.C. Eringen, Academic Press, pp.1-127 (1976).
- 5) K. Rasilainen, "Matrix Diffusion Model: In Situ Tests Using Natural Analogues", pp.1-81 (1997) Technical Research Centre of Finland, VTT Publications 331.
- 6) Y. Ichikawa, K. Kawamura, M. Nakano, K. Kitayama, T. Seiki and N. Theramast, "Seepage and consolidation of bentonite saturated with pure- or salt-water by the method of unified molecular dynamics and homogenization analysis", Engineering. Geology, Vol.60, pp.127-138 (2001).